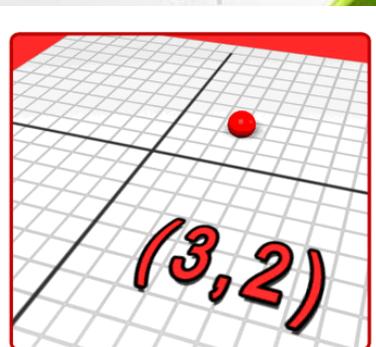
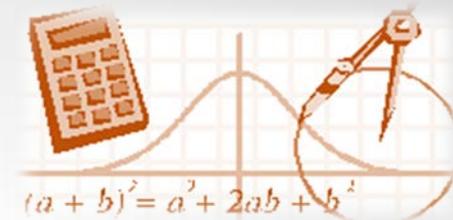
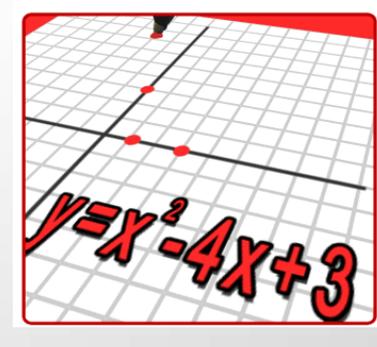


Тема 1.4 Функции, их свойства и графики



Автор: Переверзьева Н.С.
Преподаватель математики Лицей №6



Цели урока:

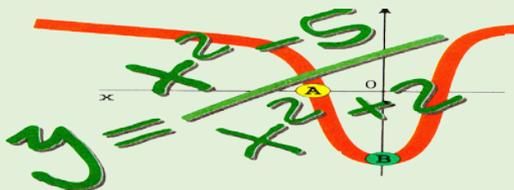
*Ознакомиться с понятием «функция»,
закрепить его на примерах*

Усвоить новые термины

Узнать методы исследования функции

Закрепить знания по теме при решении задач

Научиться строить графики функций





Немного истории

*Слово "функция" (от латинского *functio* — совершение, выполнение) впервые употребил в 1673 г. немецкий математик **Лейбниц**.*

*В главном математическом труде "Геометрия" (1637) **Рене Декарта** впервые введено понятие переменной величины, создан метод координат, введены значки для переменных величин (x, y, z, \dots)*

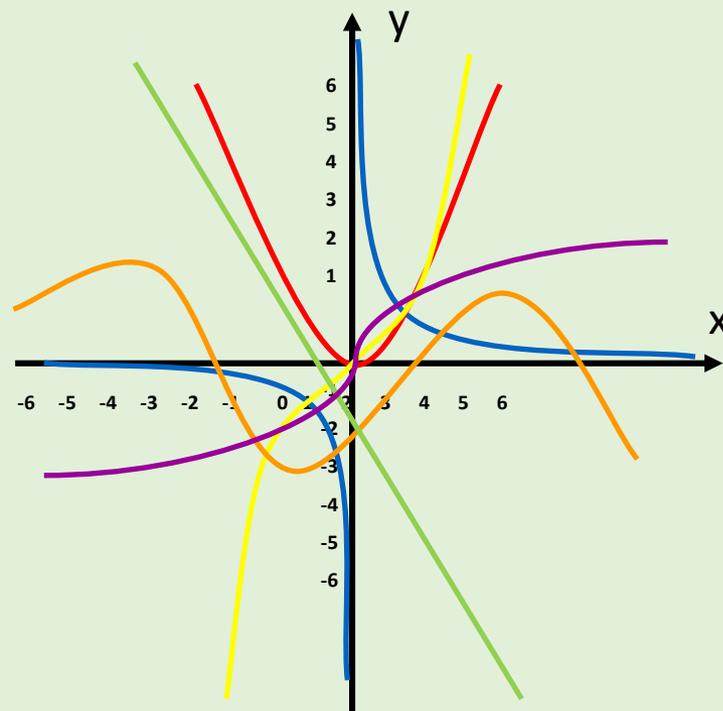
*Определения функции «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств» сделал в 1748 г. немецкий и российский математик **Леонард Эйлер***

Определение.

«Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y , называют **функцией**».

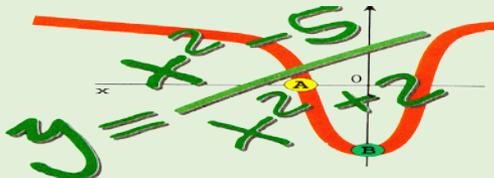
Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) **записывается** с помощью равенства $y = f(x)$

Способы задания функций: табличный (таблица), графический (график), аналитический (формула).



Общая схема исследования функции

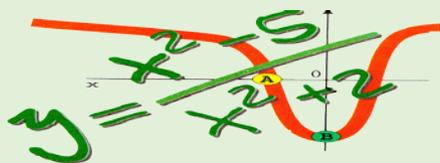
1. Область определения функции.
2. Исследование области значений функции.
3. Исследование функции на четность.
4. Исследование промежутков возрастания и убывания функции.
5. Исследование функции на монотонность.
5. Исследование функции на экстремум.
6. Исследование функции на периодичность.
7. Определение промежутков знакопостоянства.
8. Определение точек пересечения графика функции с осями координат.
9. Построение графика функции.



Область определения функции

Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.

Например, для функции $y=x$ областью определения является множество всех действительных значений чисел \mathbb{R} ; для функции $y=1/x$ областью определения является множество \mathbb{R} кроме $x=0$.



Найдите область определения функции, график которой изображен на рисунке.

1

[-

Верно!

2

[-

Подумай!

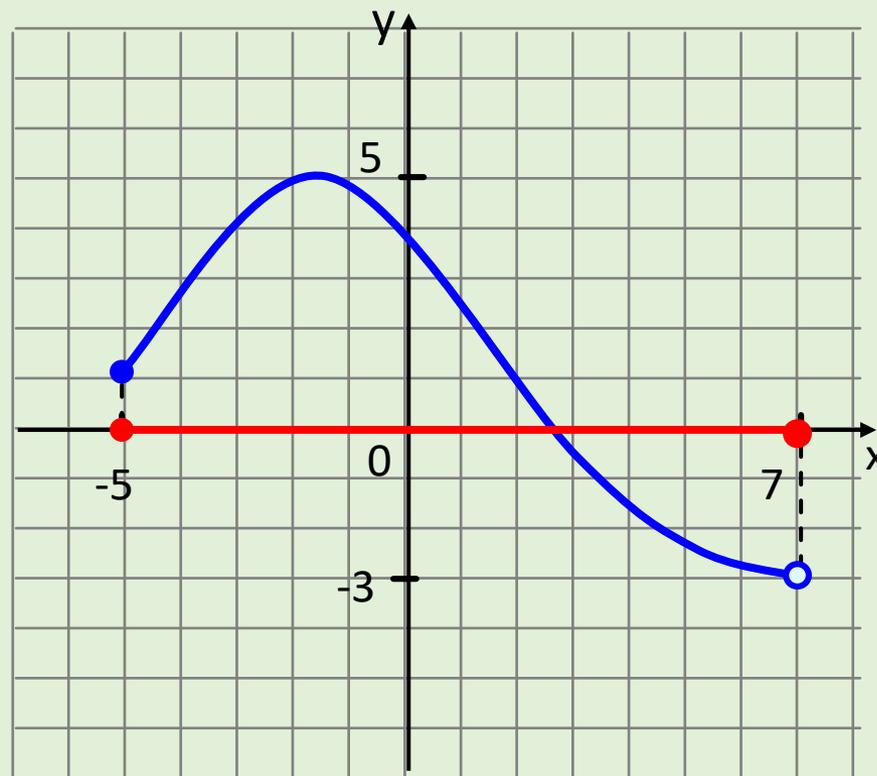
3

[-

Подумай!

4

(-3;5]



Проверка (1)

Область определения функции – значения, которые принимает независимая переменная x .

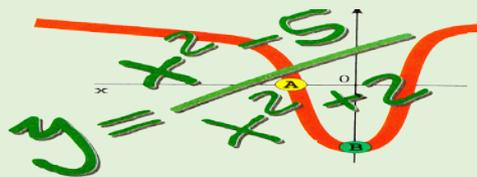


Множество значений функции.

Множеством значений функции называется множество всех действительных значений функции y , которые она может принимать.

Например, множеством значений функции $y = x + 1$ является множество \mathbb{R} ,

множеством значений функции $y = x^2 + 1$ является множество действительных чисел, больше или равных 1.



*Найдите множество значений функции,
к которой изображен на рисунке.*

1

$[-6; 6]$

Подумай!

2

Подумай!

3

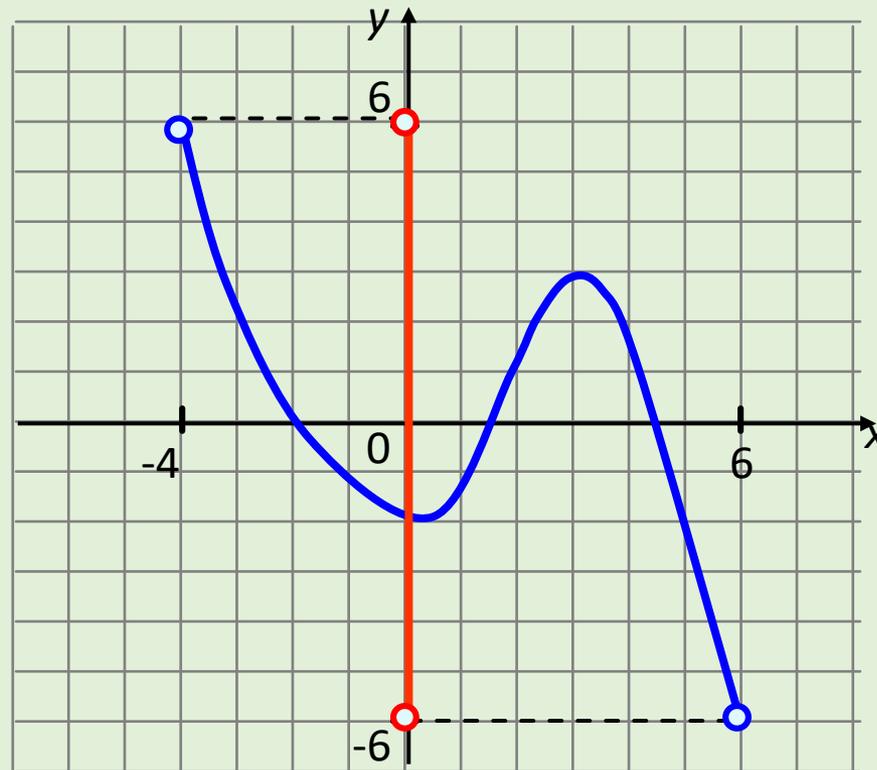
$(-6; 6]$

Верно!

4

$[-6; 6)$

Подумай!



Проверка (1)

*Множество значений функции – значения,
которые принимает зависимая переменная y .*

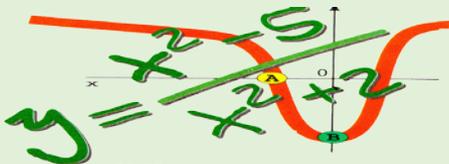


Исследование функции на четность.

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный значение функции не изменяется, т.е. $f(-x) = f(x)$.

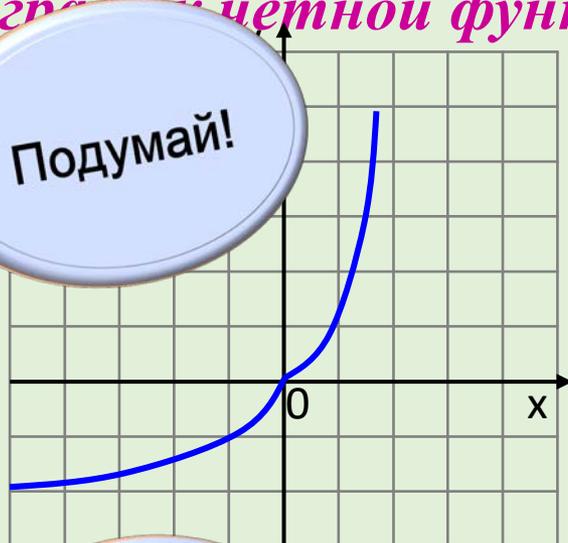
Например, парабола $y = X^2$ является четной функцией, т.к. $(-X^2) = X^2$.

График четной функции **симметричен относительно оси Oy** .

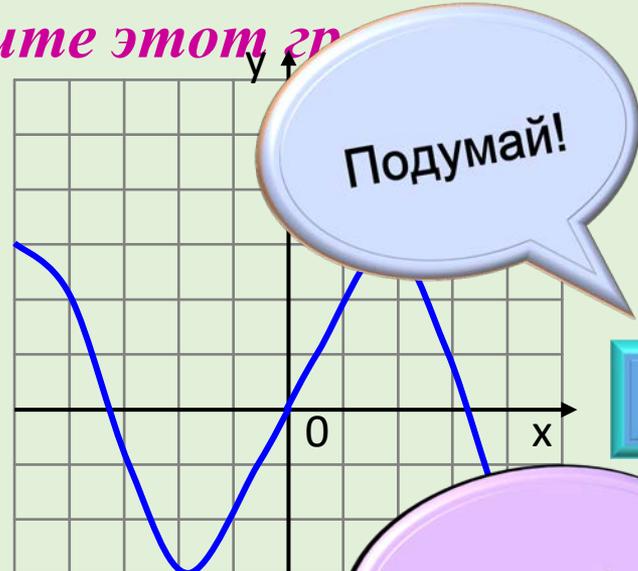


На одном из следующих рисунков изображен график четной функции. Укажите этот график.

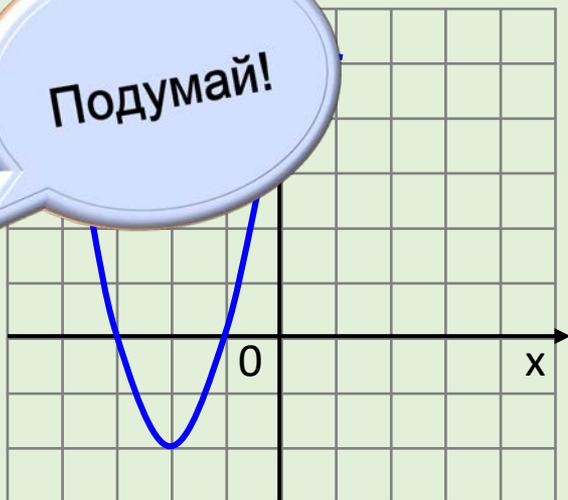
1



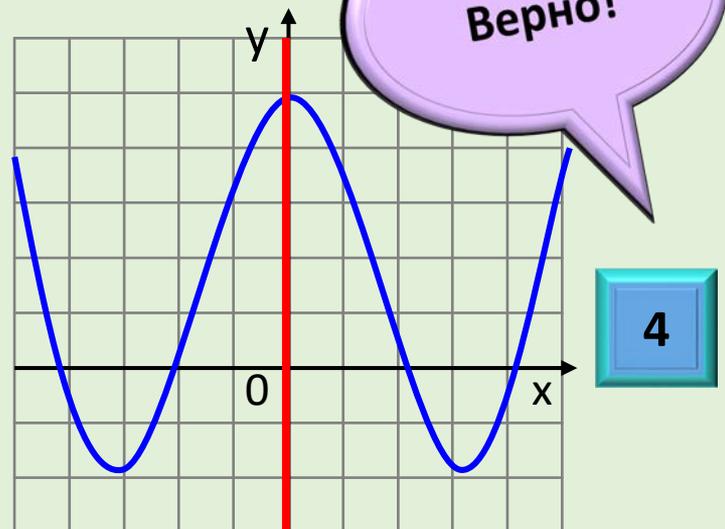
2



3



4



Проверка (1)

График симметричен относительно оси Oy



Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный функция изменяется только по знаку, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = x^3$ – нечетная, т.к. $(-x)^3 = -x^3$.
График нечетной функции **симметричен относительно начала координат**.

Свойством четности или нечетности обладает не всякая функция. Например, функция $f(x) = x^2 + x^3$ не является ни четной, ни нечетной:

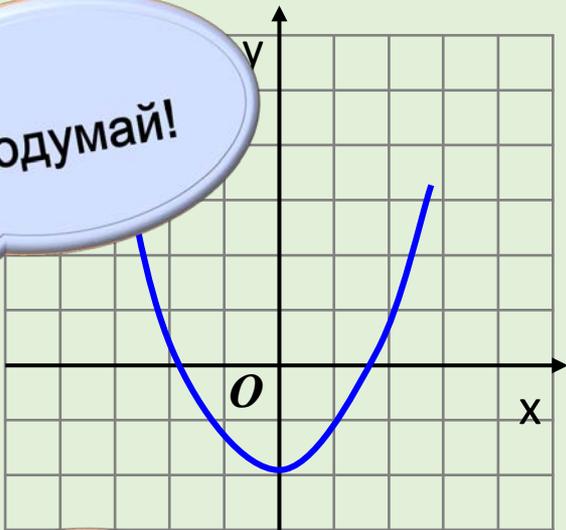
$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3; \quad x^2 + x^3 \neq x^2 - x^3;$$



На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот график.

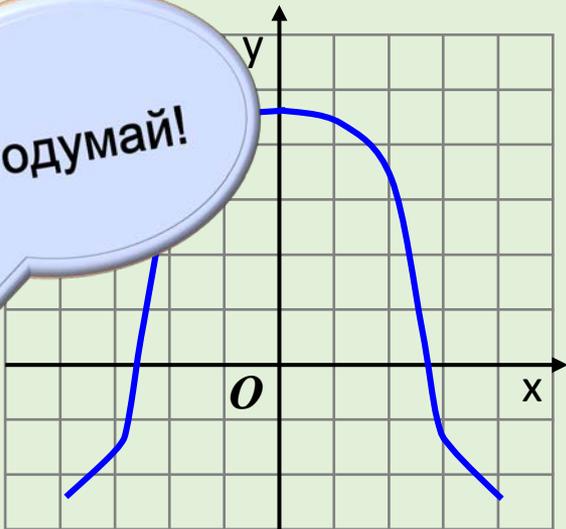
Подумай!

1



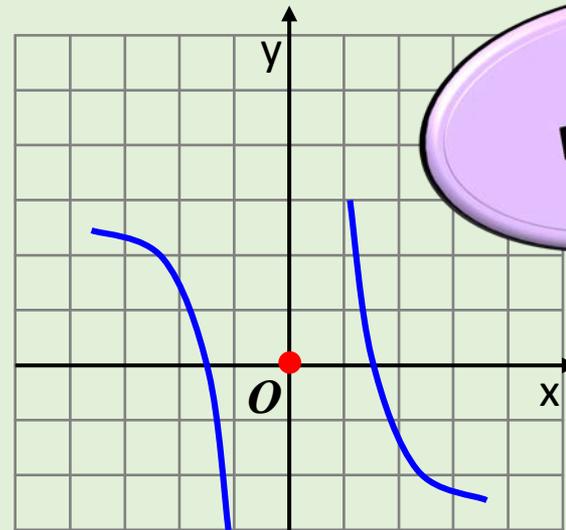
Подумай!

2



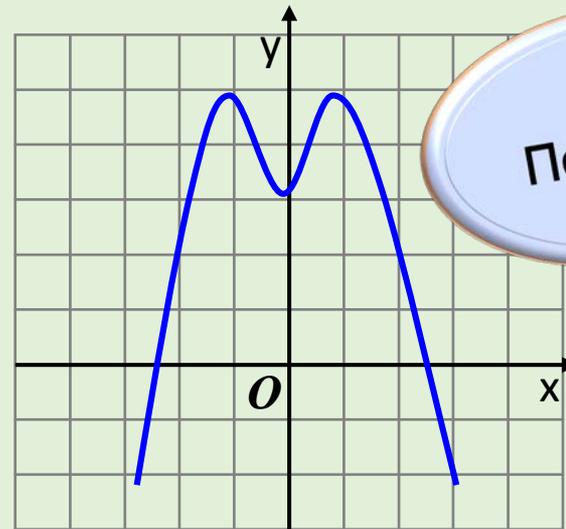
Верно!

3



Подумай!

4



Проверка (1)

График симметричен относительно точки O .



Определение промежутков возрастания и убывания

Среди множества функций есть функции, значения которых с увеличением аргумента только возрастают или только убывают. Такие функции называются **возрастающими** или **убывающими**.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому промежутку, при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому промежутку, при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство

$$f(x_1) > f(x_2)$$



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-5;6)$. Укажите промежутки, где функция возрастает. Подумай!

1

$[-5; -3]$

Подумай!

2

$[-3; 2]$

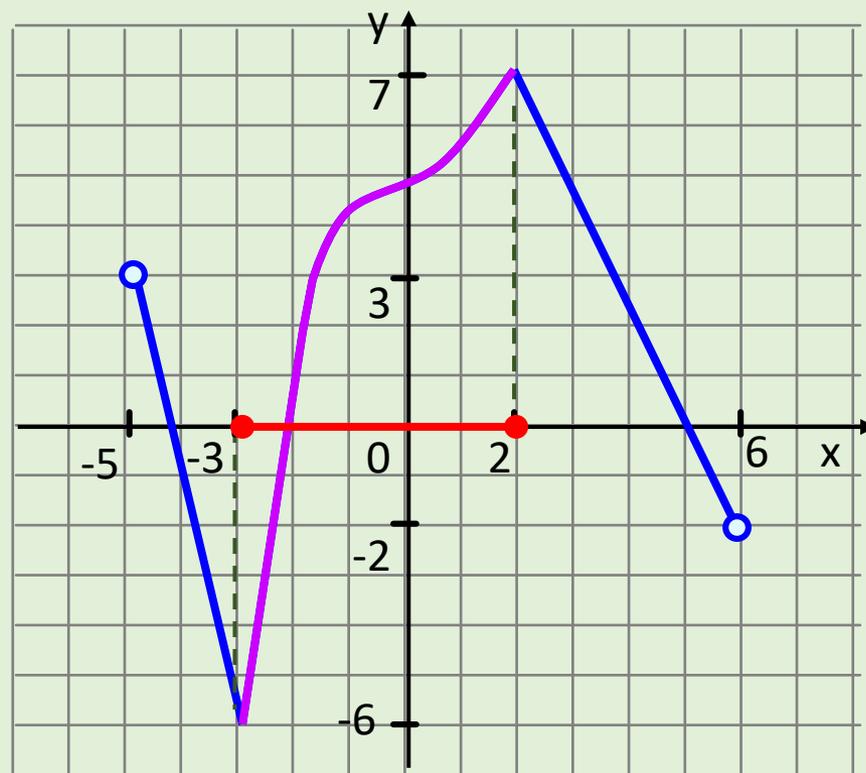
Подумай!

3

Верно!

4

$[-3; 2]$



Проверка (1)



*На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.
Укажите количество нулей функции.*

1

1

Подумай!

2

2

Подумай!

Верно!

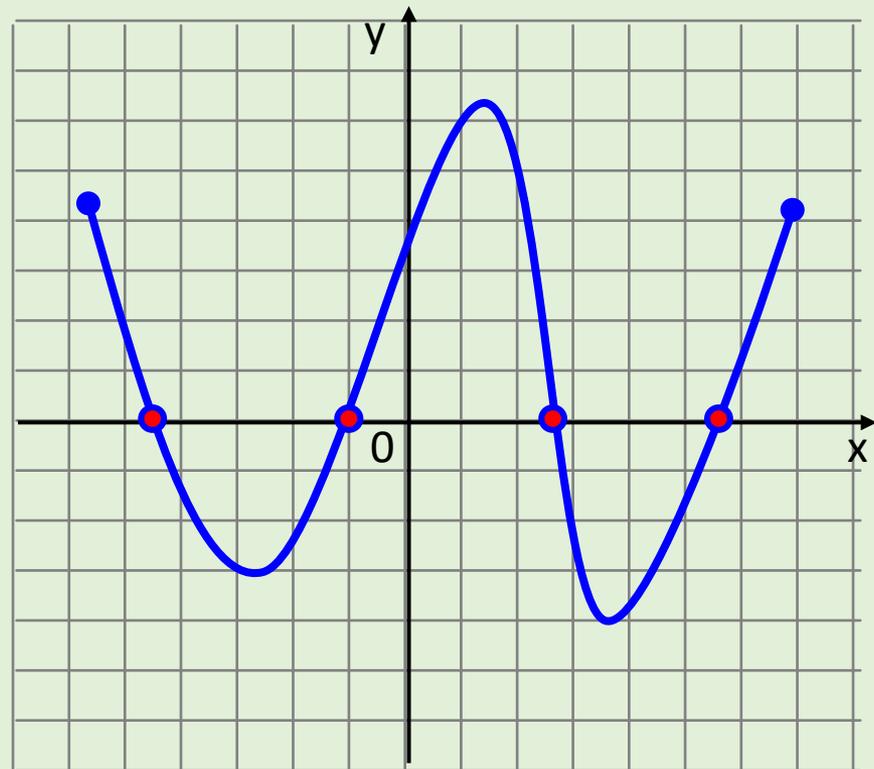
3

4

Подумай!

4

0



Проверка (1)

Ноль функции – значение x , при котором $y = 0$. На рисунке – это точки пересечения графика с осью Ox .



*Какие из функций являются
возрастающими, а какие убывающими?*

1) $y = 5^x$ *возрастающая, т.к. $5 > 1$*

2) $y = 0,5^x$ *убывающая, т.к. $0 < 0,5 < 1$*

3) $y = 10^x$ *возрастающая, т.к. $10 > 1$*

4) $y = \pi^x$ *возрастающая, т.к. $\pi > 1$*

5) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ *убывающая, т.к. $0 < \frac{2}{3} < 1$*

6) $y = 49^{-x}$ *убывающая, т.к. $49^{-1} = \frac{1}{49}$ и $0 < \frac{1}{49} < 1$*

Исследование функции на монотонность.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - промежутками монотонности.

Например, функция $y = x^2$ при $x < 0$ монотонно возрастает.

Функция $y = x^3$ на всей числовой оси монотонно возрастает, а

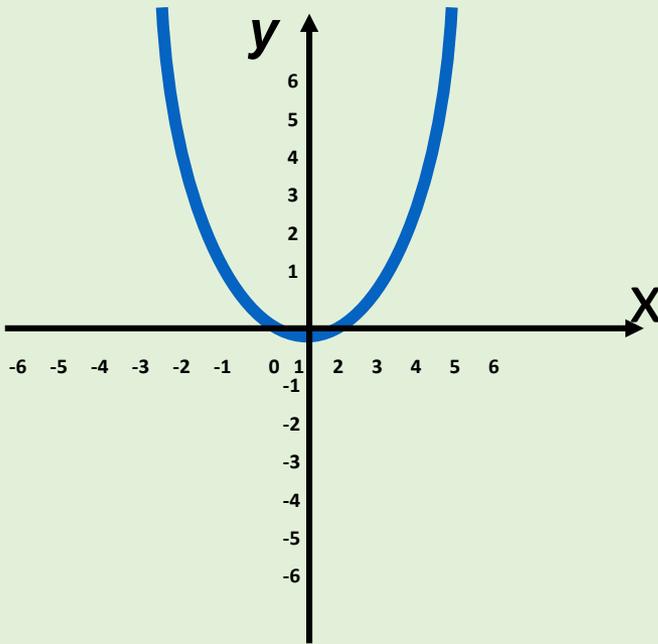
функция $y = -x^3$ на всей числовой оси монотонно убывает.



Исследовать функцию на монотонность

Функция $y=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Функция $y=x^2$

при $x < 0$ монотонно убывает,
при $x > 0$ монотонно возрастает

Обратная функция

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при единственном значении x , то такую функцию называют **обратимой**.

Например, функция $y=3x+5$ является обратимой, т.к. каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x . Напротив, функция $y=3x^2$ не является обратимой, поскольку, например, значение $y=3$ она принимает и при $x=1$, и при $x=-1$.

Для всякой непрерывной функции (такой, которая не имеет точек разрыва) существует монотонная однозначная и непрерывная обратная функция.



Диктант

№	Вариант-1	№	Вариант-2
---	-----------	---	-----------

Найти область определения функции

1	$y = \sqrt{x^2 - 1}$	1	$y = \frac{x+1}{x^2 + 2}$
---	----------------------	---	---------------------------

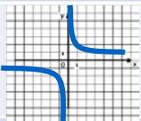
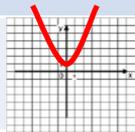
Найти область значений

2	$y = \frac{x+1}{x^2 + 2}$	2	$y = \sqrt{x^2 - 1}$
---	---------------------------	---	----------------------

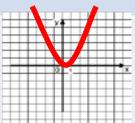
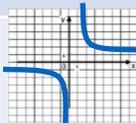
Указать способ задания функции

3	<table border="1"><tbody><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr></tbody></table>	x	-2	-1	0	1	y	3	5	7	9	3	$h(x) = \begin{cases} x+3, & x < -3; \\ x^2 + 3, & x \geq -3. \end{cases}$
x	-2	-1	0	1									
y	3	5	7	9									

Исследовать функцию на четность

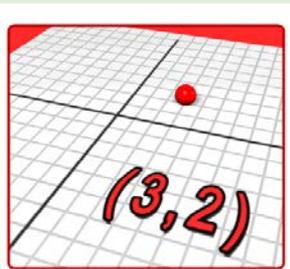
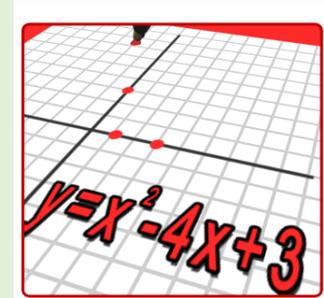
4		4	
---	---	---	---

Исследовать промежутки возрастания и убывания функции.

5		5	
---	---	---	---

Функции.

1. Линейная функция
2. Квадратичная функция
3. Степенная функция
4. Показательная функция
5. Логарифмическая функция
6. Тригонометрическая функция



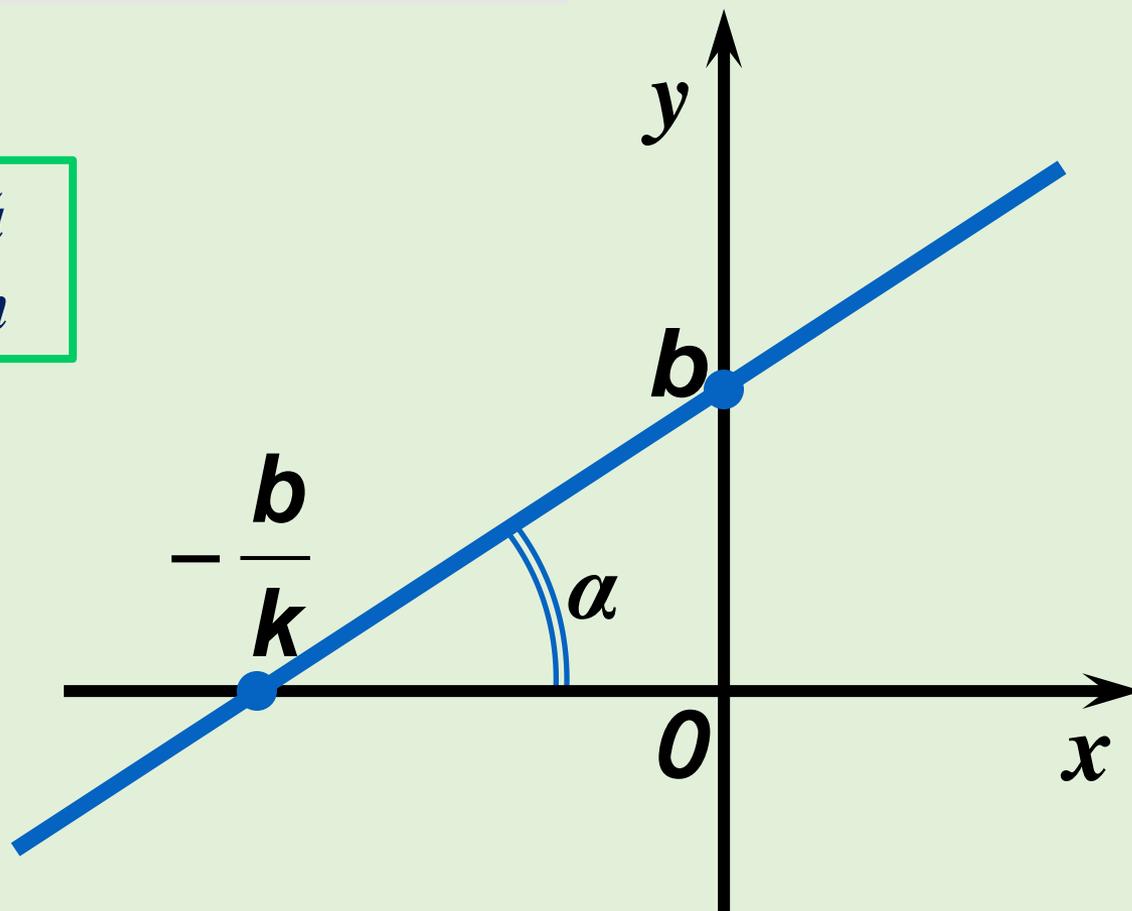
Линейная функция

$$y = kx + b$$

b – свободный коэффициент

k – угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$



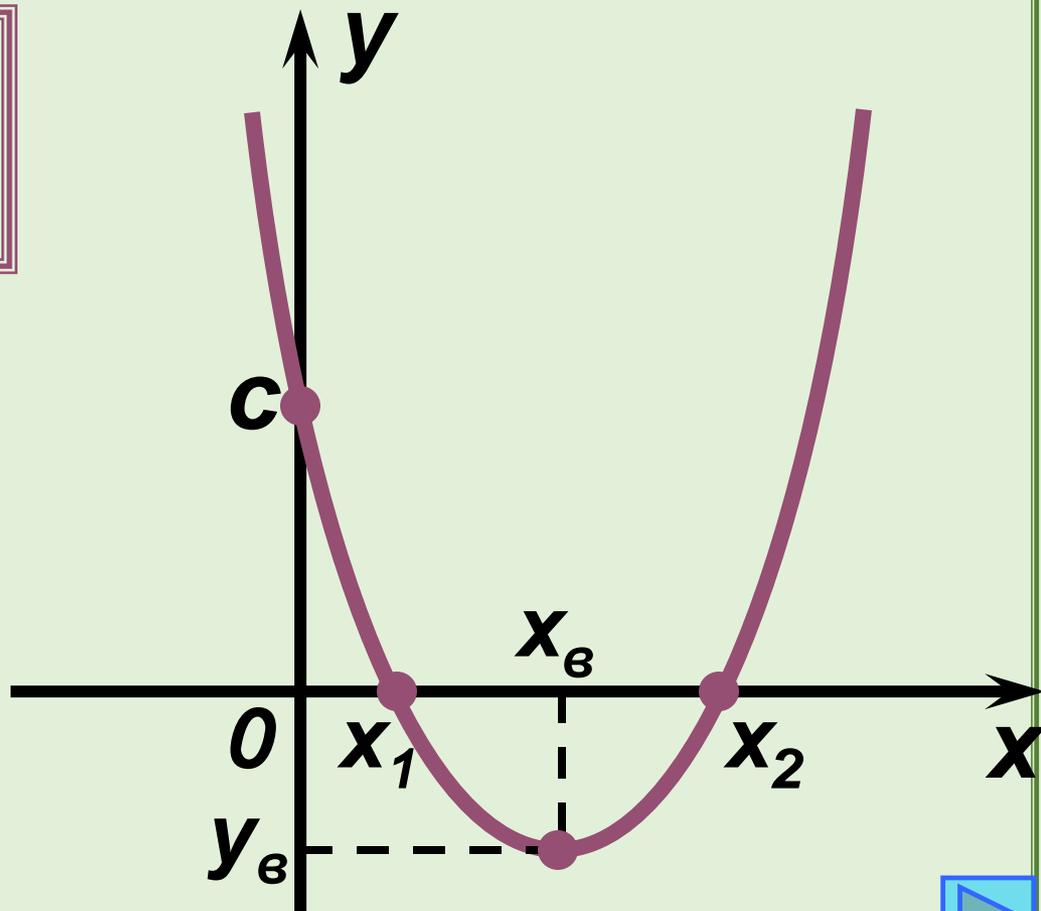
Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\text{в}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

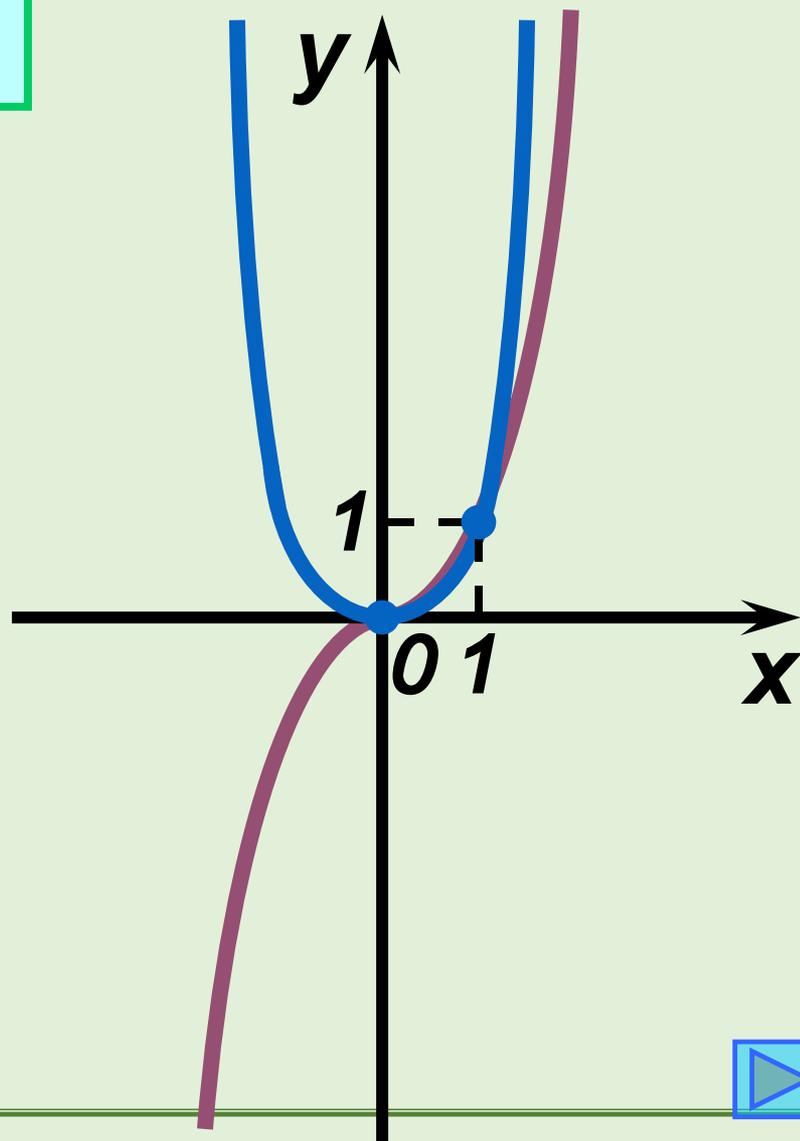


Степенная функция

$$y = x^n$$

$y = x^n$, где $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$y = x^n$, где $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

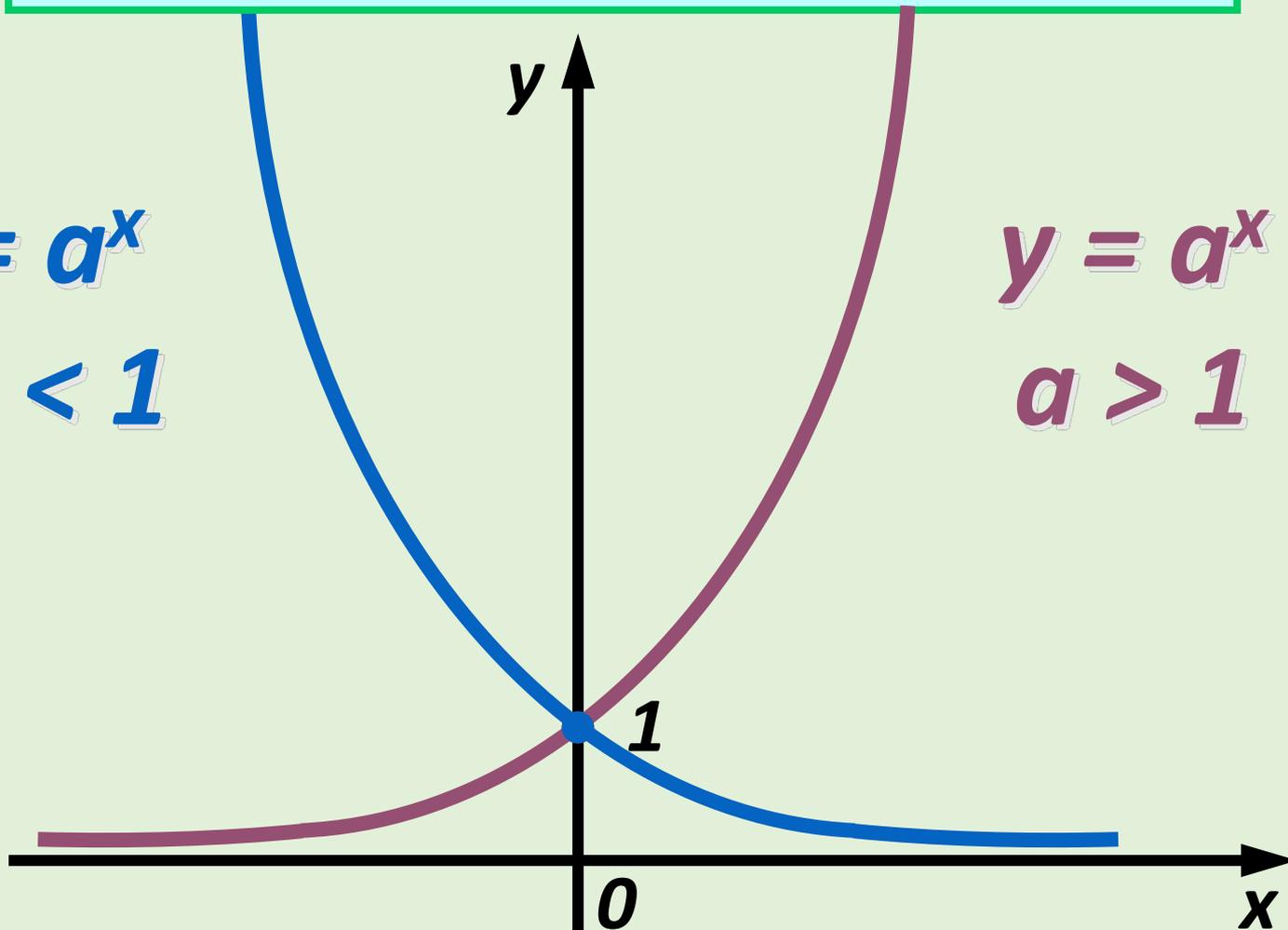


Показательная функция

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$y = a^x$$
$$0 < a < 1$$

$$y = a^x$$
$$a > 1$$

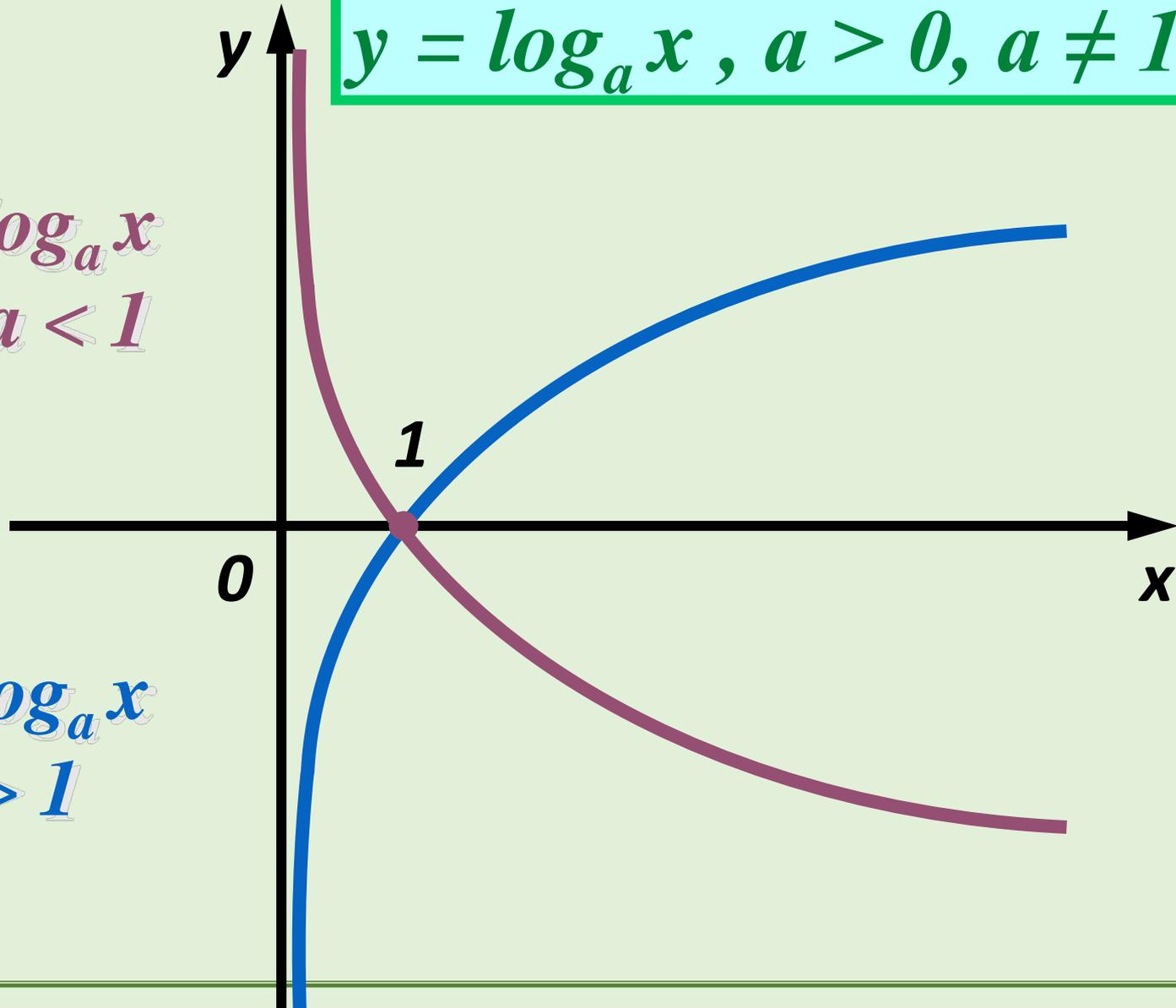


Логарифмическая функция

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$y = \log_a x$$
$$0 < a < 1$$

$$y = \log_a x$$
$$a > 1$$



Самостоятельная работа

Построить графики функций и найти:

1. $D(y)$ -область определения;
2. $E(y)$ -множество её значений;
3. Проверить на чётность (нечётность);
4. Найти промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства;
5. Определить точки пересечения с осями

Вариант-1

1. $y = 2x^2 - 4x + 5$

2. $y = \frac{1}{4x - 2}$

3. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

4. $y = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$

5. $y = x^3$

Вариант-2

1. $y = (x - 5)^2 + 3$

2. $y = \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$

3. $y = \log_2 x$

4. $y = 2x^2 + 4x - 8$

5. $y = x^3 + 1$



Вопросы для повторения

- 1. Сформулируйте определение функции.*
- 2. Что называется областью определения функции?*
- 3. Что называется областью изменения функции?*
- 4. Какими способами может быть задана функция?*
- 5. Как находится область определения функции?*
- 6. Какие функции называются четными и как они исследуются на четность?*
- 7. Какие функции называются нечетными и как они исследуются на нечетность?*
- 8. Приведите примеры функций, которые не являются ни четными, ни нечетными.*
- 9. Какие функции называются возрастающими? Приведите примеры.*
- 10. Какие функции называются убывающими? Приведите примеры.*
- 11. Какие функции называются обратными?*
- 12. Как расположены графики прямой и обратной функций?*

